

## Estimation directe des facteurs d'intensité des contraintes généralisés avec une méthode X-FEM multigrille à 3 niveaux

J.C. Passieux<sup>1</sup>, A. Gravouil<sup>2</sup>, J. Réthoré<sup>2</sup>, M.C. Baietto<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ICA, INSA Toulouse, France, [jean-charles.passieux@insa-toulouse.fr](mailto:jean-charles.passieux@insa-toulouse.fr)

<sup>2</sup> LaMCoS, INSA Lyon, France, {[Anthony.Gravouil](mailto:Anthony.Gravouil@insa-lyon.fr),[Julien.Rethore](mailto:Julien.Rethore@insa-lyon.fr),[Marie-Christine.Baietto](mailto:Marie-Christine.Baietto@insa-lyon.fr)}@insa-lyon.fr

---

**Résumé** — Récemment, une méthode Hybride Analytique/X-FEM (HAX-FEM) a été proposée pour l'extraction *directe* des FIC. Ici, nous proposons une méthode multigrille à trois niveaux basée sur une version sans recouvrement d'HAX-FEM. La méthode fait le pont entre trois échelles caractéristiques de la fissuration : la structure (EF), la fissure (X-EF), et les non-linéarités en pointe de fissure (modèle analytique). Cette technique permet d'utiliser un domaine analytique aussi petit que l'on souhaite, tout en restant robuste et précise sur l'estimation des FICs de mode mixte ainsi que des termes d'ordre supérieur.

**Mots clés** — X-FEM, Williams, FIC généralisés, estimation directe.

---

### 1 Introduction

Depuis une dizaine d'années, de nombreux travaux ont consisté à développer des outils souples et de plus en plus simple à mettre en œuvre pour la simulation de la rupture. En ce sens, X-FEM (eXtended Finite Element Method, [1]) a permis d'effectuer un pas considérable dans cette direction, puisqu'elle autorise l'utilisation de maillages non conformes à la géométrie de la fissure, ce qui implique qu'il n'est plus nécessaire de remailler la structure à chaque pas de propagation. Pour aller encore plus loin, plusieurs méthodes d'enrichissement alternatives ont été proposées récemment [7, 8, 12, 2, 14, 5, 6] qui donnent directement accès à une évaluation des facteurs d'intensité des contraintes (FIC), afin de s'affranchir des phases de post-traitement (moindres carrés, intégrales d'interactions, entre autres). A chaque fois, l'idée consiste à enrichir le modèle éléments finis autour de la pointe par les champs analytiques [4] issus de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR), dont les coefficients sont proportionnels aux FIC. La façon de coupler la description X-FEM standard et la zone d'enrichissement particulière permet de différencier chacune de ces approches.

Une première famille de méthodes utilise la partition de l'unité pour assurer ce couplage [8, 12, 14]. La description élément-fini (EF) étant toujours active autour de la pointe, elle se trouve en compétition avec les modes analytiques dont les coefficients donnent accès aux FIC que l'on souhaite estimer avec une grande précision. Même lorsqu'elle est désactivée [8], l'estimation est pénalisée par des problèmes de conditionnement, ce qui dégrade la convergence EF de la méthode. Pour contourner ces problèmes, une méthode d'enrichissement alternative a été proposée. Elle consiste à désactiver complètement la partie régulière par éléments finis autour de la pointe de fissure, et à chercher la solution comme une combinaison linéaire des modes asymptotiques. Les deux descriptions y sont couplées sur une zone de recouvrement grâce à la méthode Arlequin. L'étude détaillée des performances de cette méthode, en terme de convergence et de qualité d'évaluation des FIC, comparativement aux approches citées plus haut est proposée dans [2].

Dans une première partie de la présentation, nous présentons une variante sans recouvrement de cette méthode. Le couplage est alors assuré par un raccord de type Mortar sur une interface  $\Gamma$ . La méthode possède alors quelques similarités avec le Hybrid Crack Element (HCE [7]), mais cette dernière, développé pour des maillages conformes à la fissure, est formulée en effort, et ne permet donc pas d'extraire les composantes de mode rigide directement. Par ailleurs, toutes les méthodes d'enrichissement citées reposent sur les séries de Williams dont l'expression dépend de la forme de la fissure. Le plus souvent, afin de conserver un caractère générique, il est choisi de faire l'hypothèse que la fissure est droite à l'intérieur

du modèle analytique, pour n'avoir à manipuler qu'un unique ensemble de modes prédéfinis. Cette hypothèse suppose que le maillage éléments finis soit suffisamment fin autour de la pointe de fissure, de manière à ce que le domaine  $d'$  soit suffisamment petit. Cependant, dans certains cas, le maillage initial n'est pas adapté à une telle hypothèse et il nécessite d'être raffiné localement. Outre son étape de remaillage, le raffinement conduit à un système de plus grande taille qui engendre un surcoût de calcul significatif, qui peut dans certains cas tridimensionnels devenir rédhibitoire. Dans la deuxième partie de la présentation, nous proposons une méthode multigrille à 3 niveaux pour contourner ce problème.

## 2 Approche monoéchelle

### 2.1 séries de Williams'

Si on considère un milieu isotrope linéaire 2D, avec une fissure droite semi-infinie, et que l'on désigne par  $r$  et  $\theta$  les coordonnées locales en pointe de fissure, alors le champs de déplacement  $\mathbf{u}(r, \theta)$  peut s'écrire sous la forme de la double série suivante [4] :

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{i=I, II} \sum_{n=0}^{\infty} a_i^n \Phi_i^n(r, \theta) \quad (1)$$

ou les  $a_i^n$  sont des coefficients associés aux champs asymptotiques en point de fissure  $\Phi_i^n$  dont l'expression est la suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_I^n(r, \theta) &= r^{n/2} \begin{bmatrix} (\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos(\frac{n}{2} - 2) \theta \\ (\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin(\frac{n}{2} - 2) \theta \end{bmatrix} \\ \Phi_{II}^n(r, \theta) &= r^{n/2} \begin{bmatrix} -(\kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin(\frac{n}{2} - 2) \theta \\ (\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n) \cos \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \cos(\frac{n}{2} - 2) \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dans laquelle, la constante de Kolossov  $\kappa$  est égale à  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformation planes et à  $\kappa = ((3 - \nu)/(1 + \nu))$  en contraintes planes.  $\nu$  désigne le coefficient de Poisson.

Ces séries ont certaines propriétés remarquables. D'une part, les coefficients  $a_I^0$ ,  $a_{II}^0$  et  $a_{II}^2$  correspondent aux modes rigides, les translations pour les deux premiers et la rotation de par rapport à la pointe de fissure pour le dernier. D'autre part,  $a_I^2$  est lié au  $T$ -stress de mode  $I$ . Et enfin, les coefficients du premier ordre ( $n = 1$ )  $a_I^1$  et  $a_{II}^1$  sont proportionnels aux Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC), tels que :

$$a_I^1 = \frac{K_I}{2\mu\sqrt{2\pi}} \quad \text{and} \quad a_{II}^1 = \frac{K_{II}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \quad (2)$$

où  $\mu$  est le second coefficient de Lamé.

### 2.2 formulation

On considère, à présent, un problème (cf. Figure 1) sur un domaine fissuré  $\Omega$ , soumis à des conditions aux limites en déplacement  $\mathbf{u}_d$  sur une partie  $\partial_1\Omega_X$  de son bord, et en efforts  $\mathbf{f}_d$  sur la partie complémentaire  $\partial_2\Omega_X$

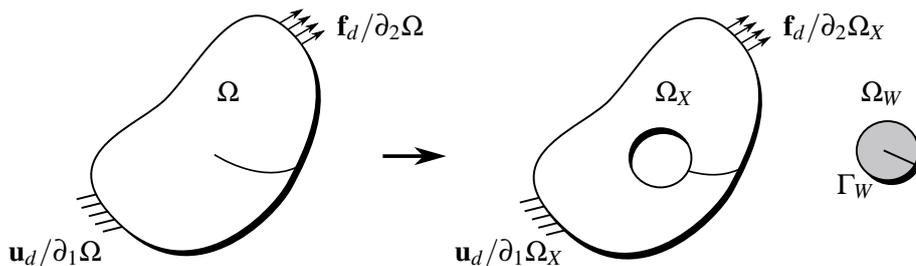


FIGURE 1 – Problème de référence et décomposition du domaine en un patch analytique et un domain X-FEM.

Si, pour trouver la solution de ce problème, on recherche le déplacement inconnu en projection sur les séries de Williams, on dispose alors d'une estimation des FIC généralisés *directement et sans phase de post-traitement*. Cependant cette démarche est licite seulement sous l'hypothèse d'une fissure rectiligne. Un développement analogue peut néanmoins être écrit pour des formes de fissures plus complexes, mais afin de conférer un caractère générique à la méthode et pour n'avoir à manipuler qu'un petit nombre de modes précalculés, nous choisissons de conserver cette hypothèse et de restreindre cette méthode de projection à un petit patch autour de la pointe de fissure dans lequel l'hypothèse est raisonnable. Par ailleurs, un autre argument pour étayer ce choix est que, s'agissant d'une série infinie, la méthode de projection suppose de tronquer la base à un certain ordre. Or, les modes sont naturellement classés suivant qu'ils ont un effet local autour de la pointe  $n = 1$  et des effets de plus en plus lointains pour  $n > 2$ . On a donc tout intérêt à choisir un patch de petite taille de manière à n'utiliser que quelques termes dans la série. Dans le reste du domaine, un modèle X-FEM standard sera utilisé, mais uniquement avec des enrichissements saut. Par la suite, les deux domaines seront notés  $\Omega_W$  et  $\Omega_X$  (cf Figure 1).

Pour  $i = \{X, W\}$ , on introduit les espaces  $\mathcal{U}_i = \{\mathbf{u}_i \in H^1(\Omega_i) \mid \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_d \text{ on } \partial_1 \Omega_i\}$ , ainsi que les espaces vectoriels associés  $\mathcal{U}_i^0$ . La méthode consiste donc à trouver le champs de déplacement  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_X, \mathbf{u}_W\} \in \mathcal{U}_X \times \mathcal{U}_W$ , tel que  $\forall \mathbf{u}_i^* \in \mathcal{U}_i^0$  :

$$a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i^*) = l_i(\mathbf{u}_i^*) \quad i = X, W \quad (3)$$

$$\text{avec} \quad a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i^*) = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^*) : \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i) d\Omega \quad \text{et} \quad l_X(\mathbf{u}_X^*) = \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{u}_X^* \mathbf{f}_d ds$$

expression dans laquelle  $\mathbb{C}$  désigne le tenseur de Hooke.

Pour fermer le problème, les déplacements  $\mathbf{u}_X$  et  $\mathbf{u}_W$  doivent être raccordés. Contrairement à la méthode proposée dans [2], ici, les domaines ne se recouvrent pas. La méthode de couplage n'est donc plus la méthode Arlequin [], mais un raccord intégral de type Mortar sur l'interface noté  $\Gamma$ . La condition de continuité du déplacement est assurée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}$  (espace *ad-hoc*) et du produit scalaire associé :

$$\langle \mathbf{u}_X - \mathbf{u}_W, \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma = \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{u}_X - \mathbf{u}_W) ds = 0$$

Le problème se résume donc à trouver  $(\mathbf{u}_X, \mathbf{u}_W, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{U}_X \times \mathcal{U}_W \times \mathcal{L}$ , tels que :

$$a_X(\mathbf{u}_X, \mathbf{u}_X^*) + a_W(\mathbf{u}_W, \mathbf{u}_W^*) + \langle \mathbf{u}_X^* - \mathbf{u}_W^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma + \langle \mathbf{u}_X - \mathbf{u}_W, \boldsymbol{\lambda}^* \rangle_\Gamma = l_X(\mathbf{u}_X^*) \quad (4)$$

*Remarque.* Ce raccord intégral permet d'éviter l'usage d'éléments de transition, ce qui a pour effet une amélioration significative de la qualité de la solution et donc de l'estimation des FIC par rapport à un couplage au sens de la partition de l'unité [6].

### 2.3 mise en œuvre

En pratique, à partir d'un maillage X-FEM standard, la démarche consiste à retirer quelques éléments autour de la pointe de fissure. Ces éléments sont, en fait, conservés car ils servent de support à l'intégration des modes de Williams', et, de plus, ils réintègrent le modèle X-FEM lorsque la fissure propage. Pour d'avantages de précisions sur la mise en œuvre, le lecteur peut se référer à [5].

La discrétisation du problème (4) conduit au système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_X & 0 & \mathbf{C}_X^T \\ 0 & \mathbf{K}_W & -\mathbf{C}_W^T \\ \mathbf{C}_X & -\mathbf{C}_W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X \\ \mathbf{U}_W \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{K}_i$  ( $i = X, W$ ) sont les matrices de rigidités,  $\mathbf{F}_d$  le vecteur des efforts généralisés, et  $\mathbf{C}_i$  ( $i = X, W$ ) les opérateurs de couplage type Mortar.

## 3 Approche multiéchelle

Dans le cas où le maillage X-FEM initial est trop grossier, il peut arriver que l'hypothèse d'une fissure rectiligne ne soit pas valable, même dans les quelques éléments entourant la pointe de fissure. Il

est alors nécessaire de raffiner le maillage, au moins localement, mais suffisamment pour légitimer cette hypothèse. Cette remarque est également valable pour X-FEM. Hormis le fait que l'étape de remaillage puisse être coûteuse, elle conduit surtout à un système de plus grande taille, dont l'inversion peut devenir prohibitive dans certains cas notamment tridimensionnels. Dans la suite, nous proposons de coupler la méthode présentée dans le section précédente à un solveur multigrille.

### 3.1 stratégie multigrille

On considère, dans cette partie, une hiérarchie de  $n_G$  maillages localisés  $\{\mathcal{M}_{X,i}\}_{i \in 1 \dots n_G}$  et de plus en plus fins (cf Fig. 6). En pratique, un premier maillage grossier  $\mathcal{M}_{X,1}$  du domaine est généré, puis il est localement raffiné en subdivisant les éléments, de telle sorte que les maillages sont imbriqués. Les quelques éléments autour de la pointe de fissure de la dernière grille forment le support d'intégration au modèle analytique qui est l'ultime modèle  $\mathcal{M}_W$  de la hierarchie. Sur les  $n_G$  premières grilles un modèle X-

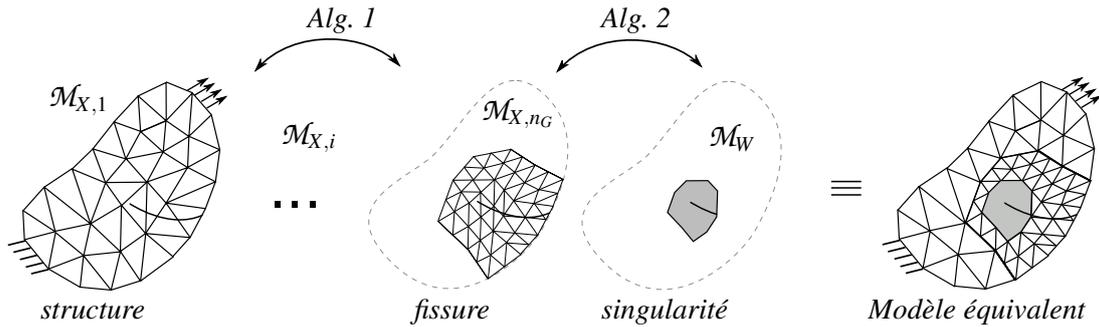


FIGURE 2 – illustration de la hiérarchie de modèles

FEM complet (enrichissement saut + pointe) est utilisé. L'interaction entre ces grilles X-FEM est assuré par l'algorithme LMG-X-FEM décrit dans [3]. Ce dernier, noté Alg. 1, assure la transition entre l'échelle de la structure pour laquelle une méthode élément finis standard peut s'avérer suffisante, et l'échelle de la fissure à laquelle X-FEM est adaptée. Ensuite, nous développons un algorithme de couplage entre le dernier modèle X-FEM  $\mathcal{M}_{X,n_G}$  et le modèle analytique  $\mathcal{M}_W$  pour assurer la transition entre l'échelle de la fissure et l'échelle de la singularité en pointe de fissure. Dans la suite, seul ce deuxième algorithme, noté Alg. 2, est détaillé, le lecteur peut se référer à [3, 5] pour plus de détails sur Alg. 1 et son interaction avec Alg 2.

### 3.2 un algorithme multigrille dédié : Alg. 2

On considère les deux derniers modèles  $\mathcal{M}_X$  (indice  $n_G$  omis) et  $\mathcal{M}_W$ . On note  $\mathcal{M}_X^B$  la partie du maillage de  $\mathcal{M}_X$  qui se trouve sous le patch  $\mathcal{M}_W$  et  $\mathcal{M}_X^A$  le complémentaire (cf Fig. 3). On notera alors,

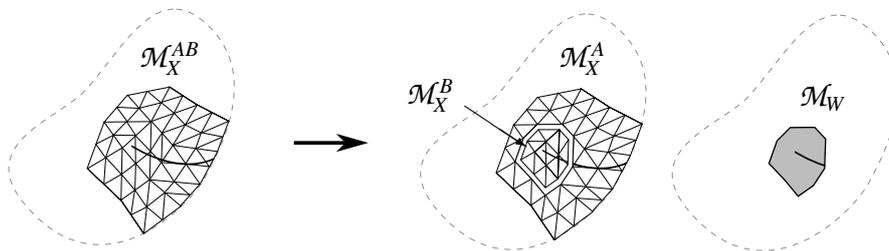


FIGURE 3 – Alg.2 : Maillage X-FEM le plus fin  $\overline{\mathcal{M}}_{AB}$  et patch analytique  $\mathcal{M}_W$

les quantités  $\cdot_X, \cdot_X^A, \cdot_X^B, \cdot_W$ , la discrétisation de  $\cdot$  sur le modèle  $\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_X^A, \mathcal{M}_X^B, \mathcal{M}_W$ .

Après la phase d'initialization  $\mathbf{U}_X^{B^0} = 0, \mathbf{U}_W^0 = 0, \Lambda^0 = 0, k = 0$ , une itération de l'algorithme Alg. 2 est constituée des deux étapes suivantes :

1. modèle X-FEM sur le domaine  $\mathcal{M}_X$  :

$$\mathbf{K}_X^{AB} \mathbf{U}_X^{AB^{k+1}} = \mathbf{F}_d^{AB} - \mathbf{C}_X^T \Lambda^k + \mathbf{K}_X^B \mathbf{U}_X^{B^k} \quad (5)$$

2. modèle réduit analytique sur le domaine  $\mathcal{M}_W$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_W & -\mathbf{C}_W^T \\ -\mathbf{C}_W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_W^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_X \mathbf{U}_X^{AB^{k+1}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3. indicateur de convergence :  $\eta = \|\mathbf{U}_W^{k+1} - \mathbf{U}_W^k\| / \|\mathbf{U}_W^{k+1}\|$

Dans un algorithme multigrille classique, le problème le plus fin n'est pas résolu exactement. On procède seulement à quelques itérations d'un algorithme itératif qui possède la propriété dite de lissage. Dans ce cas précis, le problème (6) est très réduit (quelques dizaines de degrés de libertés), une résolution directe peut-être envisagée, c'est pour ça que contrairement à un solveur multigrille classique, il n'y a pas d'étape de correction. Le problème grossier est, quant à lui, résolu exactement. La solution à convergence correspond à la solution du problème sur le modèle  $\mathcal{M}_X$  dans lequel on substitue la partie  $\mathcal{M}_X^B$ , par le modèle  $\mathcal{M}_W$ , ce qui correspond exactement à la solution du problème monoéchelle. En ce sens, cette version multigrille peut être vu comme une variante non-intrusive de la méthode monoéchelle de la partie précédente. A l'image de [10], la résolution ne fait intervenir que des problèmes X-FEM standard avec une distribution d'efforts locaux sur l'interface  $\Gamma$  ainsi que des petits problèmes analytiques locaux qui pourraient être résolus par un code extérieur dédié.

### 3.3 Couplage des deux algorithmes

S'agissant de deux algorithmes multigrilles, ils sont naturellement construits pour s'imbriquer simplement. En effet, dans Alg. 2, au lieu de résoudre exactement le problème (5), on utilise l'Alg. 1 pour le résoudre de manière itérative. L'algorithme qui en résulte est un solveur multigrille à trois niveaux. Cependant, bien qu'écrit dans le même formalisme, les algorithmes sont de natures différentes, et ils peuvent avoir des vitesses de convergence différentes. Dans une telle situation, le taux de convergence global sera égal à celui des deux qui est le plus lent. Pour cette raison, un  $W$ -cycle plus élaboré est considéré. Le nombre de sous-cyclages de chacun des deux algorithmes est utilisé pour équilibrer et optimiser le solveur.

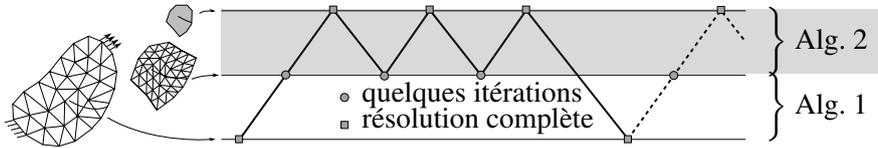


FIGURE 4 –  $W$ -Cycle multigrille élémentaire avec  $\gamma = 3$  sous-cyclages de l'Alg. 2

## 4 Illustrations

### 4.1 Plaque fissurée en cisaillement

Dans cette section, on étudie l'efficacité de la méthode sur une fissure droite en mode mixte avec l'exemple proposé dans [12]. On considère la plaque fissurée dont la géométrie est donnée Figure 5(gauche) soumise à un chargement de cisaillement  $\tau = 1 \text{ MPa}$ . La plaque est linéaire élastique (coefficient de poisson  $\nu = 0.3$  et module d'Young  $E = 100 \text{ GPa}$ ), elle fait  $L = 16 \text{ mm}$  de longueur et  $w = 7 \text{ mm}$  de largeur et la fissure fait  $a = 3.5 \text{ mm}$ . On considère qu'on se trouve dans des conditions de déformations planes. Pour ce problème, on dispose de solutions analytiques, que nous prenons comme référence  $K_I = 34N\sqrt{\text{m}}$  et  $K_{II} = 4.55N\sqrt{\text{m}}$  (voir [12] et ses références).

On dispose d'un maillage initial relativement grossier de la plaque, et une hiérarchie de maillage imbriqués est construite en sub-divisant les éléments. La Figure 5(centre) présente une hiérarchie de 4 maillages plus un patch analytique (en noir sur la figure) en pointe de fissure, tous déformés par le champs de déplacement solution obtenu avec la méthode multigrille proposée.

Le nombre d'itération, ainsi que le temps de CPU associé, pour obtenir une erreur de  $\eta = 10^{-12}$  représenté sur la Figure 5(droite), en fonction du nombre  $\gamma$  de sous-cyclages de l'Alg.2. Avec un  $V$ -cycle classique ( $\gamma = 1$  sur la figure), la vitesse de convergence de l'algorithme global est pénalisé par le

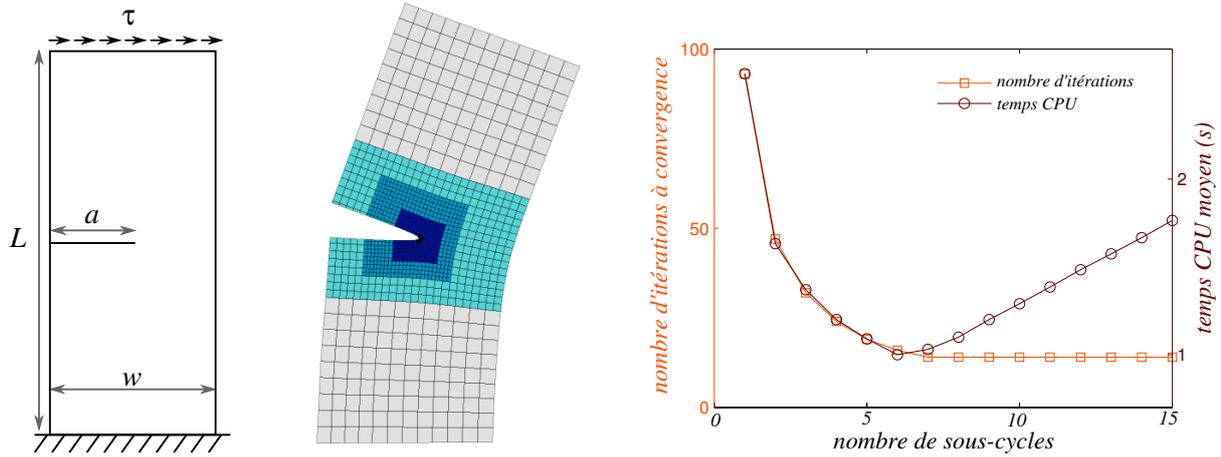


FIGURE 5 – Plaque fissurée en cisaillement : définition de la géométrie (à gauche), exemple d’une hiérarchie de 5 grilles (au centre) et solution associée en déplacement (à droite).

déséquilibre des taux de convergence des deux algorithmes Alg.1 et Alg.2. En effet, le fait de rajouter le patch analytique au sommet de la hiérarchie de grilles, fait qu’il faut 94 itérations à l’algorithme pour converger, alors qu’il en faut seulement 15 sans le patch avec LMG-X-FEM seul. En revanche, lorsque l’on utilise un W-cycle, le nombre d’itérations à convergence diminue parallèlement avec le temps de calcul quand  $\gamma$  augmente. Pour des trop grands  $\gamma$ , le temps de calcul augmente, c’est l’algorithme Alg.1 qui pénalise l’algorithme global. On voit donc apparaître un optimal autour de  $\gamma = 6$  pour cet exemple, pour lequel le temps de calcul est diminué de 60% par rapport à un approche V-cycle standard.

On étudie maintenant l’effet du nombre de grilles sur la qualité de l’estimation directe des FIC. La figure 6(gauche) présente l’erreur relative par rapport à la solution analytique des FIC de mode mixte en fonction du nombre de grilles utilisées. On remarque que la qualité des FIC est relativement stable

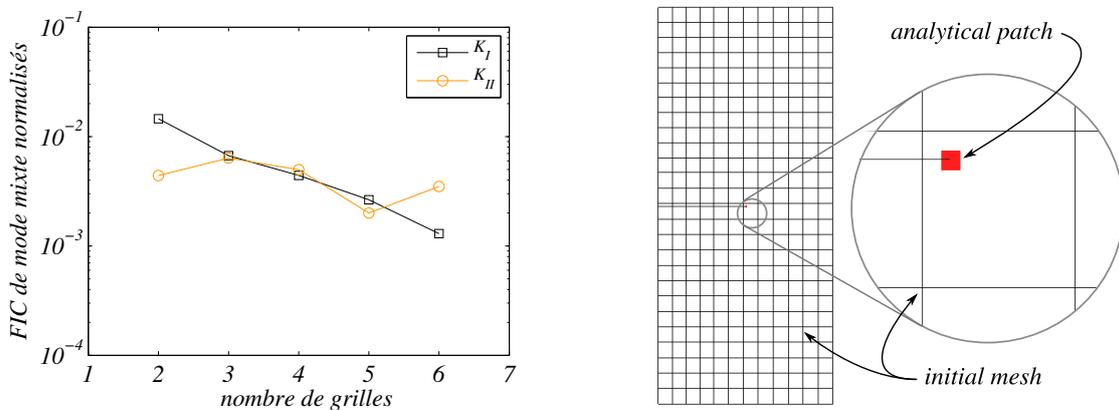


FIGURE 6 – Précision des FIC en mode mixte (à gauche) ; taille du modèle analytique et taille du maillage initial avec 4 grilles intermédiaires (à droite).

quand la taille du patch diminue. Les estimations des FIC ont plutôt tendance à s’améliorer, ceci est dû au raffinement éléments-finis autour de la singularité. Cet exemple démontre que la méthode est robuste, même lorsque la taille de patche est très petite devant la taille des éléments finis de modèle le plus grossier 6(droite). Cette stratégie multigrille permet également d’adapter la taille du modèle analytique pour s’assurer que l’hypothèse de la fissure droite est bien vérifiée.

## 4.2 propagation de fissures courbes en mode mixte

On étudie dans ce paragraphe, l’aptitude de la méthode à simuler la propagation d’un fissure non droite en mode mixte. Pour ce faire, on tente de simuler les essais de Bittencourt et al [9] . Il s’agit d’une plaque trouée (Module d’Young 200GPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ ) en flexion trois points sous

l'hypothèse de contraintes planes. Le chemin de fissure est modifié par la présence des trous, et dépend fortement des positions et tailles de l'entaille initiale. Pour la propagation, la direction de propagation est déterminée par le critère de contrainte circonférentielle maximale, traduit par :

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]$$

A chaque pas de propagation la fissure grandit de  $a = 1$  mm. La fissure étant modélisée par deux levelsets. La modification de sa géométrie est mise à jour avec la Fast Marching Method. Une fois les levelsets mise à jour, la géométrie de patch est remise à jour. Le modèle X-FEM, ou les opérateurs intergrilles sont mis à jour suivant s'il s'agit de la méthode monoéchelle ou multigrille. Les déformées de la structure

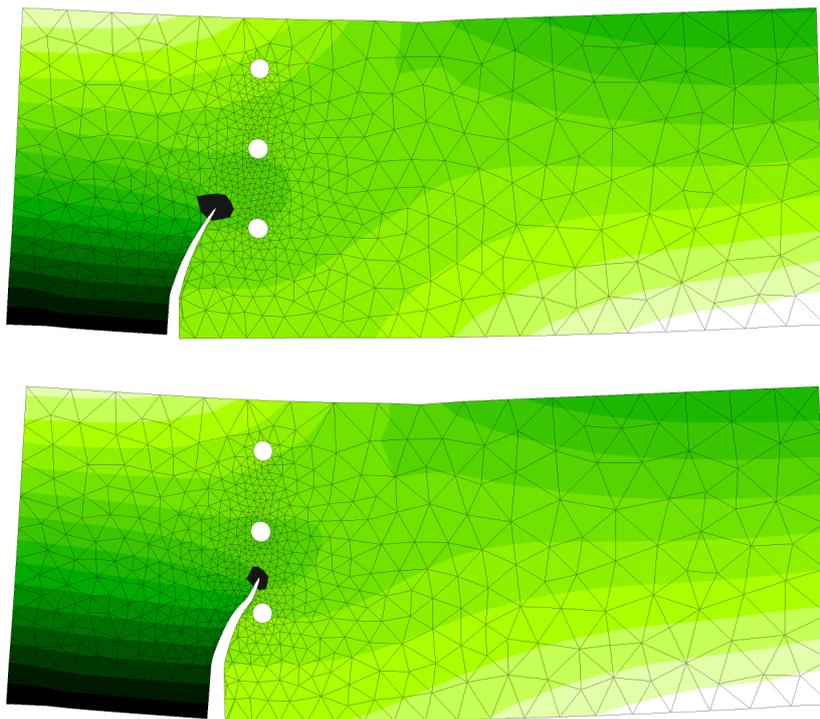


FIGURE 7 – Déformées obtenues par la méthode proposée. En noir les patch analytiques  $\Omega_W$  pour chacune des configurations au bout de 25 pas de propagation.

ainsi que les taille du patch au bout de 20 pas de propagation est présentée Figure 7 pour les deux configurations des entailles initiales. Sur la Figure 8, les trajectoires des fissures correspondantes sont tracées et comparées aux observations expérimentales de Bittencourt et al. [9]. On observe un très bon accord entre l'expérience et la simulation avec la méthode proposée, même lorsque le rayon de courbure de la fissure est important. L'hypothèse sur la forme de la fissure à l'intérieur du patch semble raisonnable, et n'affecte pas la précision de calcul dans cet exemple.

## 5 Conclusion

Une méthode simple et précise est proposée pour estimer directement les facteurs d'intensité des contraintes dans un contexte X-FEM. Elle est assortie d'un algorithme multigrille qui permet à la fois d'adapter la discrétisation, mais également d'adapter la taille du domaine analytique pour n'avoir à manipuler que les modes Williams' associés à une fissure droite, ce qui rend la démarche d'avantage générique. Malgré cette hypothèse, la méthode s'est également avérée efficace pour la simulation de la propagation de fissure courbes en mode mixte, même lorsque le rayon de courbure n'était pas négligeable à l'échelle de l'élément. Il reste à développer une technique de construction automatique et adaptative de la hiérarchie de grilles afin d'assurer une qualité souhaitée de la solution.

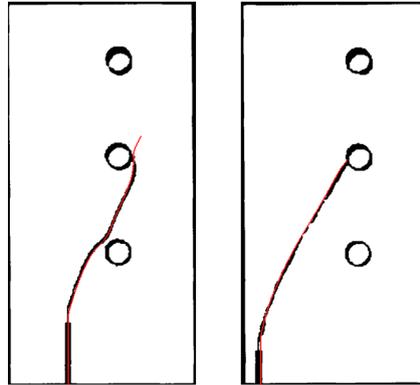


FIGURE 8 – Comparaison de la simulation avec les observations expérimentales de Bittencourt *et al.* [9]

## Remerciements

Ce travail a été effectué dans le cadre du projet ANR RUPXCUBE (ANR-09-BLAN-0009-01) « Identification tridimensionnelle des lois locales de propagation des fissures par micro-tomographie X, mesures de champ étendus et simulations par éléments finis étendus ».

## Références

- [1] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal of Engineering Science, 46, 131–150, 1999.
- [2] J. Réthoré, S. Roux, and F. Hild. *Hybrid analytical and extended finite element method (HAX-FEM) : A new enrichment procedure for cracked solids*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 81(3), 269–285, 2010.
- [3] J. Rannou, A. Gravouil, and M.-C. Baietto-Dubourg. *A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 77, 581–600, 2008.
- [4] M. Williams. *On the stress distribution at the base of a stationary crack*, ASME Journal of Applied Mechanics, 24, 109–114, 1957.
- [5] J.-C. Passieux, A. Gravouil, J. Réthoré and M.-C. Baietto. *Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multigrid X-FEM*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, in press, (doi : 10.1002/nme.3037), 2010.
- [6] E. Chahine, P. Laborde, Y. Renard *A non-conformal eXtended Finite Element approach : Integral matching Xfem*, Applied Numerical Mathematics, 61, 322–343, 2011.
- [7] B.L. Karihaloo and Q.Z. Xiao, *Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity*, Engineering Fracture Mechanics, 68, 1609–1630, 2001.
- [8] Q.Z. Xiao and B.L. Karihaloo *Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field*, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 25, 719–729, 2003.
- [9] T.N. Bittencourt, P.A. Wawrzynek, A.R. Ingraffea and J.L. Sousa *Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems*, Engineering Fracture Mechanics, 55(2), 321–334, 1996.
- [10] L. Gendre, O. Allix and P. Gosselet. *Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity*, Computational Mechanics, 44, 233–245, 2009.
- [11] P.A. Guidault, O. Allix, L. Champaney and S. Cornuault. *A multiscale extended finite element method for crack propagation.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(5), 381–399, 2009.
- [12] X.Y. Liu, Q.Z. Xiao, and B.L. Karihaloo. *Xfem for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 59, 1103–1118, 2004.
- [13] H. Ben Dhia and O. Jamond *On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(21-22), 1403–1414, 2010.
- [14] A. Zamani, R. Gracie and M. Eslami *Convergent direct sifs by extended finite element method*. Proceedings of ECCM 2010, Paris, France. [https://www.eccm-2010.org/abstract\\_pdf/abstract\\_1533.pdf](https://www.eccm-2010.org/abstract_pdf/abstract_1533.pdf)